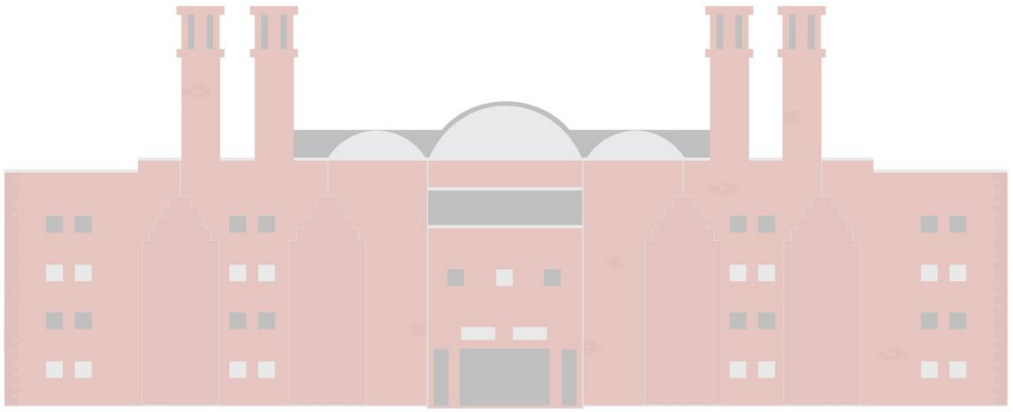
الحُقول الكَهرُطِيسيّة

المحاضرة التاسعة

10 صفحات



الدكتور: تيسير حجازي

التاريخ: 2014/11/11

طريقة فصل المتحولات :

الكرة في حقل منتظم : $\nabla^2\varphi = 0$

وفي جملة الإحداثيات الكروية الحقل متعلق بـ R و θ وغير مت-علق ب α :

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0 \quad ..\boxed{I}$$

لأن الحد : $\frac{1}{R^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0$

المعادلة رقم $\boxed{I}$ بالمشتقات الجزئية تتعلق بالإحداثيين R وθ , ولإيجاد حلها نستخدم طريقة فصل المتحولات والتي تسمى أحياناً بطريقة فورييه برنولي .

نستبدل التابع $\varphi(R,\theta)$ بجداء تابعين كل منهما يتعلق بإحداثي واحد فقط .

$$\varphi(R,\theta) = M(R).N(\varphi)$$

لاحقاً نشير إلى علاقة التابع بالإحداثية المتغيرة :

$$\varphi = M.N \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial R} = N.\frac{\partial M}{\partial R}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = M.\frac{\partial N}{\partial\theta}$$

$$\varphi(R,\theta) = M(R).N(\varphi)$$

بالتعويض في المعادلة $\boxed{I}$ نحصل على :

$$\frac{N}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial M}{\partial R}\right) + \frac{M}{R^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial N}{\partial\theta}\right) = 0$$

نضرب طرفي المعادلة (I) بـ $\frac{R^2}{M\,N}$:

$$\frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial M}{\partial R}\right) + \frac{1}{N\,sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\,\theta\frac{\partial N}{\partial\theta}\right) = 0 \quad ...\boxed{II}$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

المعادلة السابقة $\boxed{II}$ تحتوي على حدان كل منهما يحتوي تابعاً يتعلق بإحداثي واحد فقط , مجموع هذين التابعين دوماً يساوي الصفر , وهذا يعني تحقق أحد الحاتين التاليتين :

1 ـ أن يكون كل منهما يساوي الصفر .

2 ـ أن يكون الحدان متساويان بالقيمة ومتعاكسان بالإشارة .

أي لدينا :

المجموعة الأولى $\boxed{I}$

$$\begin{cases} \frac{1}{M}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial M}{\partial R}\right)=0 \\ \frac{1}{N\,sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial N}{\partial\theta}\right)=0 \end{cases}$$

وحلها من الشكل : $\varphi_1 = M_1 N_1$

أما المجموعة الثانية:

المجموعة الثانية $\boxed{II}$

$$\begin{cases} \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial M}{\partial R}\right)=+\rho \\ \frac{1}{N\,sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial N}{\partial\theta}\right)=-\rho \end{cases}$$

وحلها من الشكل : $\varphi_{II} = M_{II}\,.\,N_{II}$

- ويكون الحل العام للمعادلة (II) هو مجموع الحلول الممكنة أي :

$$\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} = M_I\,.N_I + M_{II}.N_{II}$$

حل المجموعة الأولى $\boxed{I}$: بعد الإنتقال من المشتقات الجزئية إلى الكاملة :

$$\frac{1}{M}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dM}{dR}\right)=0$$

$$R^2\left(\frac{dM}{dR}\right)=A_1 \qquad (A \text{ ثابت})$$

لا تنسونا من دعائكم فنحن نحتاجه من قلوبكم ♥

$$\frac{dM}{dR}=\frac{A_1}{R^2}\Rightarrow M=\frac{A_1}{R}+A_2$$

$$\frac{1}{N\,sin\theta}\frac{d}{d\theta}(sin\theta\frac{dN}{d\theta})=0$$

$$\Rightarrow sin\theta\ \frac{dN}{d\theta}=A_3$$

$$\frac{dN}{d\theta}=\frac{A_3}{sin\theta}\Rightarrow N=A_3\,ln\,tan\frac{\theta}{2}+A_4 \qquad (A_4,A_3 \text{ ثوابت})$$

$$\theta=0\ \Rightarrow\ tan\frac{\theta}{2}=0$$

$$\Rightarrow\ ln\,tan\frac{\theta}{2}=-\infty$$

وهذا مخالف لفيزيائية الحقل .. لذلك حتى ينطبق الحل السابق مع فيزيائية الحقل يجب أن تكون :

$A_3=0$ و بالتالي : $N=A_4$

من الحل المشترك للمجموعة $\boxed{I}$:

$$\varphi_I=M_IN_I=\left(\frac{A_1}{R}+A_2\right)A_4=\frac{C_1}{R}+C_2$$

$$C_1=A_1A_4\ ,\qquad C_2=A_2A_4$$

المجموعة الثانية $\boxed{II}$:

المعادلة الأولى : $\frac{1}{M}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dM}{dR}\right).\rho$

نستخدم تعويض أويلر : (تابع يتعلق بالإحداثيات الخطية) حيث c ثابت و R الإحداثية المتغيرة , ونفرضه :

$$M=CR^n \qquad \frac{dM}{dR}=nCR^{n-1}$$

$$\frac{R^2\,dM}{dR}=nCR^{n-1}$$

$$\frac{R^2\,dM}{dC}=nCR^{n+1}$$

$$\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dM}{dR}\right)=n(n+1)\,CR^n$$

$$\frac{1}{M}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dM}{dR}\right)=n^2+n=P$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$\Rightarrow n^2 + n - P = 0$$

وهي معادلة بمجهولين n, P .

المعادلة الثانية للمجموعة الثانية $\boxed{II}$:

$$\frac{1}{N\ sin\theta}\frac{d}{d\theta}(sin\theta\frac{dN}{d\theta}) = -P$$

أيضاً نستخدم تعويض أويلر وسيكون بالنسبة لتابع يتعلق بإحداثية زاويّة من الشكل :

$$N = B\ cos\theta \Rightarrow \frac{dN}{d\theta} = -B\ sin\theta$$

$$sin\theta\ \frac{dN}{d\theta} = -Bsin\theta^2$$

$$\frac{d}{d\theta}(sin\theta\frac{dN}{d\theta}) = -2B\ sin\theta\ cos\theta$$

$$\frac{1}{N\ sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{dN}{d\theta}\right) = (-2B\ sin\theta\ cos\theta)\frac{1}{B\ sin\theta\ cos\theta} = -2 = -P \Rightarrow \boldsymbol{P = 2}$$

$$n^2 + n - 2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{n_1 = 1 \quad n_2 = -2}$$

ومنه $M_{II} = C`\ R + \frac{C``}{R^2}$

$$N_{II} = B\ cos\theta$$

ويكون الحلّ المشترك للمجموعة الثانية $\boxed{II}$.

$$\varphi_{II} = M_{II}.N_{II} = \left(\ C_3R + \frac{C_4}{R^2}\right)cos\theta$$

مع فرض أنّ $\begin{cases} C_3 = Bc` \\ C_4 = Bc`` \end{cases}$

ويكون الحل العام لمعادلة لابلاس $\boxed{II}$ هو :

$$\varphi\ = \varphi_I + \varphi_{II} =$$

$$= \frac{C_1}{R} + C_2 + \left(\ C_3R + \frac{C_4}{R^2}\right)cos\,\theta$$

$$\boxed{III} \Rightarrow \varphi = \frac{C_1}{D} + C_2 + \left(C_3 R + \frac{C_4}{D2} \right) cos\,\theta$$

وتتحدد قيم الثوابت C_1, C_2, C_3, C_4 من الشروط الحدية حسب المسألة أي حسب حالة الكرة.

أولاً :

حالة كرة ناقلة في حقل منتظم :

- **الحقل داخل الكرة** يساوي الصفر $E_{int} = 0$

ثابت $= const = \varphi$ (سطحها سطح سوية)

- **الحقل خارج الكرة :**

يحقق معادلة لابلاس $\nabla^2 \varphi = 0$ والحل العام الذي نحصل عليه في المعادلة $\boxed{III}$ هو حل للمسألة و بالتالي يمكن إيجاد قيم الثوابت C_1, C_2, C_3, C_4 . .

لتحديد قيم الثوابت نجد أن الحل العام يجب أن يحقق الشروط الحدية على السطح الفاصل بين الناقل والعازل وإنما يجب أيضا أن يحقق الشروط الحدية في النقاط البعيدة جداً عن الكرة أي في اللا نهاية .

1 - في حالة الكرة غير مشحونة :

فإنّ جميع نقاط المستوي (xoy) نفس الكمون و يساوي φ_0

2 - في حال الابتعاد عن الكرة بمسافة $Z = R\cos\theta$:

حيث $Z >> a$ (و حيث a نصف قطر الكرة الناقلة) فإن أثر الشحنة المتحرضة على الكرة (الموجبة والسالبة) يهمل في حال لاتوجد شحنة على الكرة أما إذا وجدت شحنة كلية Q على سطح الكرة (غير الشحنة المتحرضة) فإن أثر هذه الشحنة في النقاط البعيدة جداً سيكون كأثر شحنة نقطية متوضعة في مركز الكرة وبالتالي :

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R}$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

3 ـ مركبة الكمون في النقاط البعيدة جداً الناتجة عن الحقل المنتظم ذي الشدة E_0

يكون : $E_0 . z = E_0 . R . \cos\theta$

وبالتالي يكون الكمون في النقاط البعيدة جداً :

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} + \varphi_0 + E_0 R cos\theta$$

وبما أن المعادلة III والمعادلة السابقة يحققان نفس الحل ، إذاً ثوابت المعادلتين المتشابهتين متساوية وهذا يعطي : $C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}$ وَ $C_2 = \varphi_0$ وَ $C_3 = E_0$

• يبقى الثابت C_4 في المعادلة III لايمكن إيجاد قيمته لعدم وجود حدود متناسبة عكساً مع مربع المسافة .

ولتحديد C_4 نلجأ للشروط الحدية على سطح الناقل حيث :

المركبة المماسية تساوي الصفر $E_t = 0$ مركبة مماسية .

وهذا يكافئ أنّ سطح ناقل C يكافئ هو سطح سوية وهكذا من أجل $R = a$ نصف قطر الكرة الناقلة . (على السطح) :

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} + \varphi_0 + \left(E_0 a + \frac{c_4}{a_2}\right) cos\theta = \text{ثابت} = const$$

و هذا ممكن فقط إذا كانت قيمة : $E_0\, a + \frac{c_4}{a^2} = 0$

لأن θ متغيرة $\Leftarrow$ $c_4 = -E_0\, a^3$

وهكذا نعوض في معادلة لابلاس (المعادلة الأساسية) فيكون لدينا كمون الكرة بعد التعويض يتحدد بالعلاقة:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} + \varphi_0 + E_0 \left(R - \frac{a^3}{R^2}\right) cos\,\theta$$

أما شدة الحقل فتحدد بالشكل :

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} - E_0\left(1+\frac{2a^3}{R^3}\right)cos\,\theta$$

$$E_\theta = -\frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial R} = E_0\left(1-\frac{a^3}{R^3}\right)sin\,\theta$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2}$$

مثال:

في حالة : $Q = 0\,, R = 0 \quad \Leftarrow \quad \mathbf{E_R = -3E_0\cos\theta}$

$$\mathbf{E_\theta = 0}$$

$$\mathbf{E_R = -3E_0}$$

من أجل : $\cos\theta = 1 \Leftarrow \theta = 0$

من أجل : $E_R = 0 \Leftarrow \cos 90 = 0 \Leftarrow \theta = 90^\circ$

من أجل : $E_R = 3E_0 \Leftarrow \cos 180 = -1 \Leftarrow \theta = 180^\circ$

ثانياً :

حالة كرة عازلة في حقل منتظم :

نفرض أن لدينا حقل منتظم شدته E_0 و سماحية الوسط الموجود فيه هذا الحقل ε_e ،و لنضع كرة عازلة سماحية العزل لمادتها العازلة ε_i في الحقل المنتظم، عندها في الوسطين العازلين تكون معادلة لابلاس محققة و ينطبق بالتالي الحل العام (المعادلة **III**)على الوسطين ، أي في الوسط الداخلي ε_i يكون الكمون :

$$\varphi_i = \frac{c_{1_i}}{R} + c_{2_i} + \left(\; c_{3i}\,R + \frac{c_{4i}}{R^2}\right)cos\,\theta \;\ldots\boxed{1}$$

و يكون الكمون في الوسط الخارجي ε_e :

$$\varphi_e = \frac{c_{1e}}{R} + \;\; c_{2e} \;+ \left(\; c_{3e}\,R + \frac{c_{4e}}{R^2}\right)cos\,\theta \;\ldots\boxed{2}$$

في المعادلتين 1 و 2 لدينا ثمانية ثوابت ينبغي تحديد قيمة كل منها :

أ ـ بما أن الكرة العازلة غير مشحونة أي : $Q = 0 \Leftarrow$ مركبة الكمون الناتجة عن الشحنة معدومة ، أي : $c_1 = 0$ ، و يكون الكمون في النقاط البعيدة جداً مساوياً :

$$\varphi = \varphi_0 + E_0 \ R \ cos\theta \ \ ... \ \boxed{3}$$

حيث φ_0 تمثل كمون المستوي المرجعي (xoy) ، و المركبة الثانية $E_0 \ R \ \cos\theta$ مركبة الكمون الناتجة عن الحقل المنتظم نسبة إلى المستوي المرجعي ،بمقارنة العلاقتين 2 و 3 اللتين تعطيان نفس الحل للوسط الخارجي نستنتج أن :

$$c_{2i} = \varphi_0 \quad \text{و} \quad c_{3i} = E_0$$

و بالتالي بالتعويض في 2 يبقى لدينا مجهولاً واحداً c_{4i} وتصبح على الشكل :

$$\varphi_e = \varphi_0 + \left(E_0 R + \frac{c_{4e}}{R^2}\right) cos\theta \ \ ... \ \boxed{4}$$

ب ـ الحقل داخل الــكرة : هو حقل كموني و بالتالي جميع نقاطه لها كموناً محدداً يمكن أن يتغير بشكل محدود ولا يمكن أن يتغير إلى شكل غير محدود من نقطة لأخرى و حتى تكون المعادلة 1 ليست حلاً لمعادلة لابلاس فقط و إنما أيضاً حلاً للحقل تحقق فيزيائيته يجب أن تكون قيم الثوابت :

$$c_{1i} = c_{4i} = 0$$

لأنه في الحالة المعاكسة عندما $R = 0$ يكون الكمون φ يسعى للانهاية أي :

$$(R = 0 \Rightarrow \varphi \to \infty)$$

و هذا مخالف لفيزيائية الحقل ، و بما أن في هذه الحال لدينا كموناً مرجعياً واحداً فإن:

$c_{2i} = \varphi_0$ لأن c_{2i} هو مقدار ثابت و يعبر عن قيمةالكمون المرجعي .

و هكذا يبقى في المعادلة 1 مجهولاً واحداً هو c_{3i} وتصبح المعادلة 1 على الشكل التالي :

$$\varphi_i = \varphi_0 + c_{3i} \ R \ cos\theta \ \ ... \ \boxed{5}$$

و لتحديد قيم الثابتين c_{4e} , c_{3i} المجهولين في المعادلتين 4 , 5 نلجأ للشروط الحدية على السطح الفاصل أي عندما ($R = a$) :

من الشرط الحدي الأول: $E_{ti} = E_{te} \Rightarrow \varphi_i = \varphi_e \quad \varphi_i = \varphi_e \Leftarrow E_{te} = E_{ti}$

و بتعويض $R = a$ في المعادلتين **4** , **5** نحصل على :

$$c_{3i}\, a = E_0 a + \frac{c_{4e}}{a^2} \quad \ldots \boxed{6}$$

و من الشرط الحدي الثاني : $D_{Ni} = D_{Ne} \Rightarrow D = \varepsilon_0 E \Rightarrow$

$$\Rightarrow D_N = D_r = \varepsilon\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right)$$

$$-\varepsilon_i \left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial R}\right|_{R=a} = -\varepsilon_e \left.\frac{\partial \varphi_e}{\partial R}\right|_{R=a}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_i c_{3i} = \varepsilon_e \left(E_0 - \frac{2\, c_{4e}}{a^3}\right) \ldots \boxed{7}$$

و بالحل المشترك للمعادلتين **6** , **7** نحصل على :

$$c_{3i} = E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}$$

$$E_{4e} = a^3\, E_0 \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}$$

بالتعويض يكون الكمون داخل الكرة :

$$\varphi_i = \varphi_0 + E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} R\cos\theta$$

$$\varphi_i = \varphi_0 + E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} .z \quad \ldots \boxed{8}$$

أما خارجها : $\varphi_e = \varphi_0 + E_0\left(R + \frac{a^3}{R^2}\frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i}{2\varepsilon_e - \varepsilon_i}\right)\cos\theta \quad \ldots \boxed{9}$

و تكون شدة الحقل داخل الكرة :

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$E = E_z = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = -E_0 \frac{3\varepsilon_e}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i} = const = \text{ثابت} \quad \ldots \boxed{10}$$

أي أن الحقل داخل الكرة هو حقل منتظم .

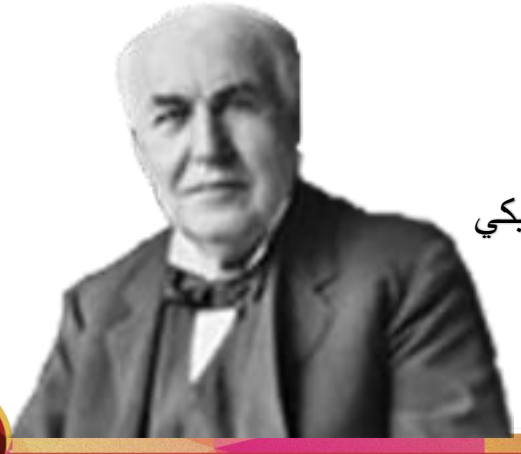
أما الحقل خارج الكرة :

$$E_R = -\frac{\partial \varphi_e}{\partial R} = -E_0 \left(1 - \frac{2a^3}{R^3} \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}\right) cos\,\theta \ldots \boxed{11}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{R}\frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} = E_0 \left(1 + \frac{a^3}{R^3} \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i}{2\varepsilon_e + \varepsilon_i}\right) sin\,\theta \ldots \boxed{12}$$

انتهت المحاضرة . .

لو فعلنا كل الأشياء التي نحن **قادرون** على فعلها لأذهلنا العالم ..



توماس أديسون

مخترع و رجل أعمال أمريكي